

# 三种运动学描述在金属成形模拟中的应用对比研究

覃海艺,王勇辉,崔振山

(上海交通大学 塑性成形工程系,上海 200030)

**摘 要:**合理选取数值模拟方法对提高金属成形模拟的效率和准确性有着重要的作用。对比和研究了 3 种运动学描述(L、E、ALE)之间的特征和关系,并分别用这 3 种描述对同一个金属成形算例进行了模拟,比较和分析了 3 种模拟结果的异同及其原因,评价了 3 种描述在金属成形模拟中的适用性。结果认为 E 描述由于不能很好地跟踪运动边界及计算耗时较长,不适合用在金属成形模拟中;ALE 描述虽然吸收了 L 和 E 描述的优点,但由于网格运动算法设计困难,要广泛应用在金属成形模拟中仍待进一步研究;L 描述由于结合了网格重划分技术,能够较好地运用于金属成形模拟。

**关键词:**运动学描述;金属成形;模拟;有限元;应用;研究

**中图分类号:** O242

**文献标识码:** A

**Abstract:** Rational selection of simulation method is significant in the improvement of the efficiency and accuracy of metal forming simulation. Three kinematic description methods (L, E, ALE method) were comparative researched on aspects of their characteristics and the connections among them. An example of metal forming was simulated by using these three kinematic methods respectively, and the differences of the simulation results were researched through comparative analysis. A conclusion was drawn that the E-method was unsuitable for the metal forming simulation because of unable to follow the kinetic-boundary accurately, and spending too much simulation time; ALE-method still had to search a better mesh-moving scheme before being widely used in metal forming simulation; and L-method, through combining the remeshing method, could be satisfactorily used in metal forming simulation.

**Keywords:** kinematic description; metal forming; simulation; finite element; application; research

## 0 引言

作为有限元法理论基础的连续介质运动和变形的运动学描述,主要有 3 种描述方式:Lagrangian(简称 L)描述、Eulerian(简称 E)描

述,以及 Arbitrary Lagrangian Eulerian(简称 ALE)描述 3 种。不同的描述方式都是为了解决特定的力学问题而发展起来的,L 描述主要用于解决小变形的固体力学问题,E 描述主要用于解决存在流动行为的流体力学问题,而

收稿日期:2009-10-10

作者简介:覃海艺(1980-),男,硕士研究生。

ALE 描述是为了解决 L 描述与 E 描述的不足而发展起来的<sup>[1]</sup>。

金属成形工艺是利用金属材料的塑性进行加工,使之形成所需形状的过程。其成形过程中涉及金属的流动、大变形等复杂问题。随着计算机技术的发展,有限元法已广泛应用于金属成形过程的数值模拟,也出现了各种用于模拟金属成形过程的商业应用软件,如 DEFORM、MARC、SUPERFORM 等,这些软件几乎都是采用了基于 L 描述的有限元理论<sup>[2]</sup>,而采用 E 描述和 ALE 描述的则很少。

本文将比较 3 种描述方法的异同,通过一个金属成形算例,分别采用 L、E 和 ALE 3 种描述对之进行模拟,并对模拟结果进行对比。

## 1 L、E 和 ALE 3 种描述之间的关系和运动学对比

### 1.1 不同描述域之间的变换

L 描述是以材料坐标为基础,其所描述的网格单元(也称 Lagrangian 网格),直接划分在用于分析的材料上,即网格和分析的材料是一体的,有限元节点即为材料点。E 描述以空间坐标为基础,网格单元(也称 Euler 网格)和所分析的材料结构是相互独立的,网格在整个分析过程中始终保持最初的空间位置不动,有限元节点即为空间点,其所在空间的位置在整个分析过程始终是不变的。而在 ALE 描述中,其网格单元(也称 ALE 网格)独立于材料实体而存在,也不完全和 Euler 网格相同,网格可以根据定义参数在求解过程中适当调整位置,如图 1 所示。

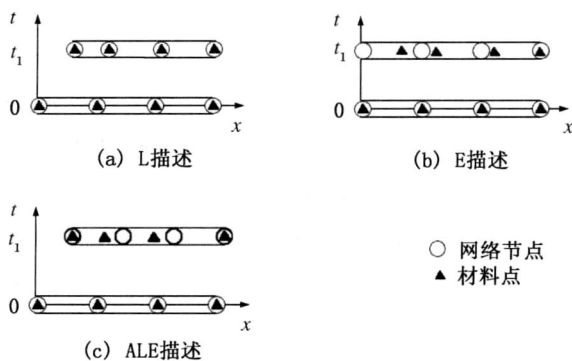


图 1 一维单元在不同描述下的空间坐标—时间关系

$\Omega_0$  表示材料的初始构形,称材料域或 L 域,其坐标  $X$  表示,称材料坐标;  $\Omega$  表示材料的当前构形,称空间域或 E 域,其坐标  $x$  表示,称空间坐标;  $\Omega_r$  表示材料的参考构形,称参考域或 ALE 域,其坐标  $r$  表示,称参考坐标或网格坐标。则 3 种域之间存在如图 2 映射关系。

(1)  $X$  在空间域的运动可描述为:

$$x = x(X, t) \quad (1)$$

函数  $x(X, t)$  将物质从材料域  $\Omega_0$  映射到空间域  $\Omega$ 。

(2)  $r$  在空间域的运动可描述为:

$$x = x(r, t) \quad (2)$$

函数  $x(r, t)$  将物质从参考域  $\Omega_r$  映射到空间域  $\Omega$ 。

(3)  $X$  在参考域的运动可描述为:

$$r = r(X, t) \quad (3)$$

函数  $r(X, t)$  将物质从材料域  $\Omega_0$  映射到参考域  $\Omega_r$ 。

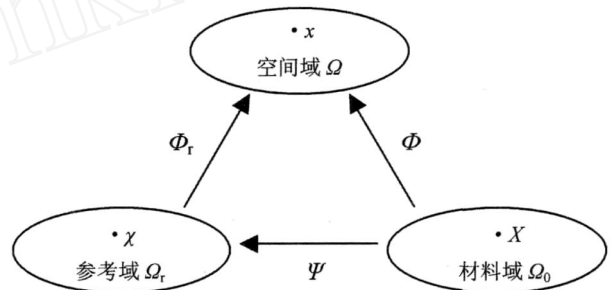


图 2 物质在 L、E 和 ALE 域之间的映射关系图

### 1.2 不同描述的关系与运动学对比

若令  $r = X$ , 即令网格坐标与材料坐标重合,则式(2)可以写成:

$$x = x(X, t) \quad (4)$$

由于网格运动与材料运动一致,这表示网格现在是 L 描述形式。

若令网格坐标等于空间坐标,即  $r = x$ , 那么式(2)可变为:

$$x = x(x, t) = I(x) \quad (5)$$

此时网格运动是一致映射,即网格在空间固定。同时,当  $r = x$  时,式(1)可变为:

$$x = \left[ \begin{matrix} x \\ t \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} I(x) \\ t \end{matrix} \right] = I(x) \quad (6)$$

所以,当 ALE 描述退化到 E 描述时有:

=

由此可见,在 ALE 描述退化为 L 描述中,映射变成一致映射,并且网格运动成为材料运动;而在它退化到 E 描述中,网格运动成为一致映射,映射成为材料运动。

L、E 和 ALE 描述之间的运动学对比如表 1 所示。

表 1 L、E 和 ALE 描述的运动学对比<sup>[3]</sup>

描述	L	E	ALE
运动	材料 $x = (X, t)$	$x = (X, t)$	$x = (X, t)$
	网格 $x = (X, t)$ $( = X, r = )$	$x = I( x )$ $( = x, r = I)$	$x = r( , t)$
位移	材料 $u = x - X$	$u = x - X$	$u = x - X$
	网格 $u_r = x - X = u$	$u_r = x - x = 0$	$u_r = x -$
速度	材料 $v = u, t [ x ]$	$v = u, t [ x ]$	$v = u, t [ x ]$
	网格 $v_r = ( u_r ) , t [ x ] = v$	$v_r = ( u_r ) , t [ ] = 0$	$v_r = ( u_r ) , t [ ]$
加速度	材料 $a = v, t [ x ]$	$a = v, t [ x ]$	$a = v, t [ x ]$
	网格 $a_r = ( v_r ) , t [ x ] = a$	$a_r = ( v_r ) , t [ ] = 0$	$a_r = ( v_r ) , t [ ]$

从表 1 可以看出,材料运动是与描述无关的,而网格运动随着描述变化。只要用网格坐标代替材料坐标,网格运动的定义则与材料运动的定义完全类似。

2 L、E 和 ALE 3 种描述的应用范围和优缺点

2.1 L 描述

L 描述多用于固体结构的应力应变分析,由于网格点与物质点在物体的变形过程中始终保持重合,物质点与网格点之间不存在相对运动(即迁移运动,也称对流运动)。这大大地简化了控制方程的求解过程,而且能准确描述物体的移动界面,并可跟踪质点的运动轨迹。但在涉及到特大变形的问题中,物质的扭曲导致计算网格的畸形而使得计算精度下降或者计算失败。

2.2 E 描述

在某些问题中,L 描述是根本不适用的。例如,对于高速流动的流体力学问题、爆炸、喷射等。而 E 描述由于计算网格在物质的变形过程中始终保持不变,因此可很容易地处理物质

的扭曲。但对运动界面需要引入非常复杂的数学映射,将可能导致较大的误差,如果处理不好,还会出现有限元方程系数矩阵的非对称项,从而得到振荡解。另外,由于材料通过单元对流,本构方程的处理和更新是复杂的。

2.3 ALE 描述

ALE 描述最初出现于数值模拟流体动力学问题的有限差分方法中。这种方法兼具 L 描述和 E 描述两者的特长,即首先在结构边界运动的处理上它引进了 L 描述的特点,因此能够有效地跟踪物质结构边界的运动;其次在内部网格的划分上,它吸收了 E 描述长处,但又不完全和 E 描述相同,即网格可以根据定义的参数在求解过程中适当调整位置,使得网格不至于出现严重的畸变。这种方法在分析大变形问题时是非常有利的。

但 ALE 描述也存在很大的缺点,通过函数的复合,由式(1)、(2)和(3)可得:

= r<sup>-1</sup>( x, t ) = r<sup>-1</sup>( ( X, t ), t ) = ( X, t ) (7)

x = ( X, t ) = r( ( X, t ), t ) (8)

由此可见,在 ALE 描述中,网格运动是预先设置的或者是由计算得到的。即如何很好的消除网格严重扭曲的问题,需要对网格运动作出明智的选择。虽然有很多学者对网格运动算法做了研究<sup>[4-5]</sup>,也出现了自适应的网格运动技术<sup>[6]</sup>,但对于很多复杂的三维变形问题,特别是采用了六面体网格单元类型的结构,要既保证网格不出现严重扭曲,又不改变网格的拓扑结构将是困难的。

3 金属成形中 3 种描述模拟结果的对比

本章节采用 LS-DYNA 有限元软件模拟 1 个模锻构件的成形过程,分别采用了 3 种描述进行模拟,并比较在不同描述下得出的模拟结果。

本算例的有限元模型如图 3 所示,分上模、下模和锻件 3 部分。下模固定,上模匀速向下运动,共分 20 个加载步,锻件在上模的推动作用下产生变形。为了简化计算,设上、下模为刚性体,锻件左侧、前、后平面上的节点施加法向

位移约束,如图4所示。同时,为了使结构不至于过早的因网格畸变而无法计算,在锻件底部进行了圆角处理。3种描述的模拟中,模型单元

尺寸、材料属性、边界条件完全相同,但在E描述模拟中,在整个模腔中增加了 Euler 网格单元,以便材料有足够的流动空间,如图5所示。

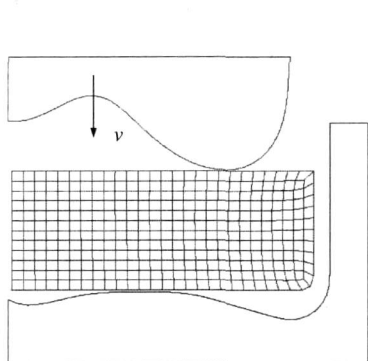


图3 L及ALE描述的网格模型

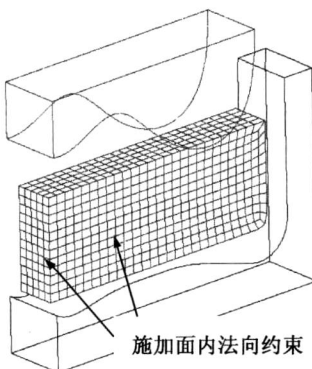


图4 施加位移边界条件

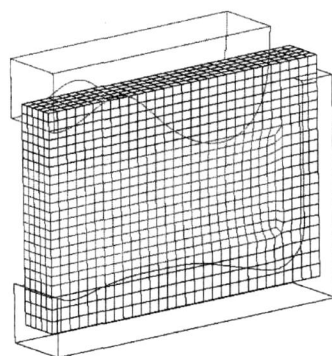


图5 E描述的网格模型

### 3.1 变形结果对比

由图6可知,加载至第13步时,锻件尚属变形前期,网格没有发生较大的变形和扭曲,3种描述的模拟结果基本相同。但在E描述中,材料的边界受网格尺寸和网格边界影响较大,如图6中画圈处,材料边界平行于网格边界,这与结构的实际变形是有差别的。究其原因,这主要与E描述所采用的界面处理算法有关。

图7是加载至第19步时的变形图,此时锻件已发生了较大的变形,3种描述的模拟结果也

表现出了较大的差别。

在L描述中,部分网格发生了很大的扭曲,这将大大地影响计算的精度。

在E描述中,锻件末端的材料流动缓慢,与L描述的变形结果有较大的差别。

在ALE描述中,相对于L描述的模拟结果,网格扭曲得到了一定的改善,但接触边界上出现了较多小尺寸的单元,这将大大地减小计算时间步长,增加计算时间成本。当模型进一步发生变形时,出现了尺寸更小的网格。可见,

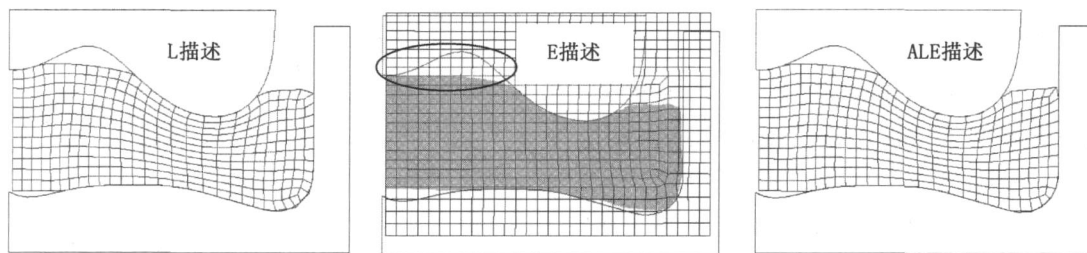


图6 第13步的变形结果

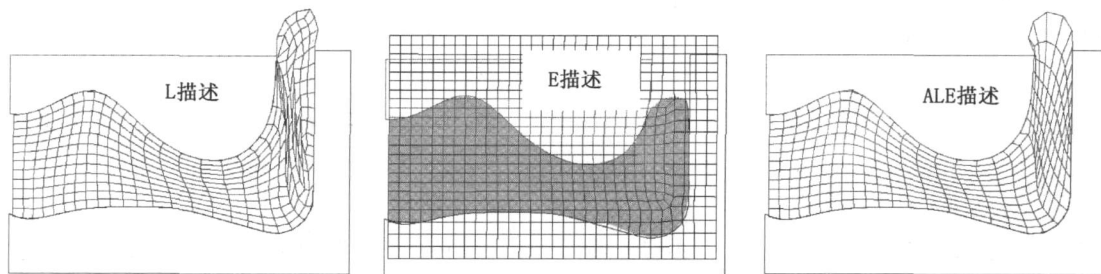


图7 第19步的变形结果

在网格拓扑结构不变的前提下,形状要求和尺寸要求很难同时得到满足,要设计一个高效的网格运动算法是困难的。

虽然 ALE 描述在边界处理上与 L 描述的基本相同,能够有效地跟踪物体边界的运动。但在这 2 种描述中,同一节点在同一边界上的运动速度通常是不一样的,因此在同一时刻,同一长度的边界上出现的节点个数和单元尺寸通常也是不一样的,这将导致 2 种描述在局部边界上的形态有所不同。如图 7 所示,锻件表面整体形态基本相同,但在材料流动末端,其边界形态有轻微的差别。

3.2 CPU 耗时对比

由表 2 可知,L 描述用时比较少,ALE 描述由于增加了网格运动的计算,以及出现了较小尺寸的单元,这使得 CPU 用时成倍地增加。E 描述中,由于增加了节点个数,以及需要反复处理网格间的材料对流问题,其 CPU 耗时数十倍地增加。

表 2 3 种描述的 CPU 耗时对比		
描述	CPU 时间/s	模型节点数
L	77	4 086
E	3 552	6 396
ALE	983	4 086

4 结 论

(1) 由于 E 描述不能精确跟踪运动界面,而且相对其他描述计算耗时较大,因此目前在金属成形模拟中应用比较少。

(2) 虽然 ALE 描述综合了 L 和 E 描述的优点,但 ALE 描述需要预先设置网格运动路径,合理设计网格运动算法成为困难。如果运动算法设计不合理,不但无法消除网格扭曲现象,还会出现较小尺寸的网格,大大地增加了计算时间。因此,ALE 描述要在金属成形模拟中得到广泛应用,仍有很多问题待研究。如:高效的网格自适应算法、网格重划分技术辅助 ALE

算法等<sup>[7]</sup>,将是目前研究的内容之一。

(3) L 描述虽然受到网格畸变的限制,但是通过结合运用网格重划分技术<sup>[8-9]</sup>,使 L 描述能够较好地模拟金属成形过程。这也是当前 L 描述能够普遍应用于金属成形模拟中的原因之一。

参考文献:

[1] Noh W F. A time-dependent two-space dimensional coupled Eulerian-Lagrangian code [C]// Methods in Computational Physics. New York: Academic Press, 1964:117-179.

[2] 王跃先,陈军,阮雪榆. ALE 有限元方法在金属塑性加工中的应用[J]. 模具技术,2001(3): 1-4.

[3] Belytschko Ted, Liu Wing Kam, Moran Brian. Nonlinear Finite Element for Continua and Structures [M]. 庄茁,译. 北京:清华大学出版社,2002.

[4] Kanchi Harish, Masud Arif. A 3D adaptive mesh moving scheme[J]. International journal for numerical methods in fluids, 2007, 54:923-944.

[5] 周宏,李俊峰,王天舒. 用于 ALE 有限元模拟的网格更新方法[J]. 力学学报, 2008, 40(2):267-272.

[6] Harten A, Hyman J M, Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1983, 50: 253-276.

[7] 庄新村,赵震,向华,等. ALE 有限元法在金属塑性成形领域的研究进展[J]. 塑性工程学报, 2008, 15(1): 1-6.

[8] Dyduch M, Habraken A M, Cescotto S. Automatic adaptive remeshing for numerical simulations of metal forming[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 101: 283-298.

[9] Cheng J H. Automatic adaptive remeshing for finite element simulation of forming processes[J]. International journal for numerical methods in Engineering, 1988, 26:1-18.